7/11/16

Διαφ. Εξισώσεις

ΑΣΚΗΣΗ

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

αν $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} = \varphi(x\cdot y)$, $\rho(u) = e^{\int \varphi(u)\,du}$ ολ/κός παράγοντας

Λύση

Έστω ότι $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} = \varphi(x\cdot y)$, αρκεί νδο η $\underbrace{\rho M(x,y)}_{M_1}dx + \underbrace{\rho N(x,y)}_{N_1}dy = 0$

είναι άμεσα ολοκληρώσιμη, δηλ. $\dfrac{\partial M_1}{\partial y} = \dfrac{\partial N_1}{\partial x}$

Είναι $$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(\rho(x\cdot y)\, M(x,y)\big) = \rho'(xy)\, x M(x,y) + M_y(x,y)\,\rho(xy)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho(xy)\, N(x,y)\big) = \rho'(xy)\, y N(x,y) + N_x(x,y)\,\rho(xy)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x} \overset{\rho' = \rho(xy)\varphi(xy)}{=\!=\!=\!=} \dots = 0$$

Εφαρμογή

$$(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2)\,dx + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)\,dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= 3xy^2 + 4x^2y - 2y \\ N_x &= 2xy^2 + 6x^2y - 4x \end{aligned}\right\} \quad \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{xy^2 - 2x^2y - 2y + 4x}{} = xy(y-2x) - 2(y-2x)$$

$$= \frac{(y-2x)(xy-2)}{xy(-2x+y)}$$

$$yN - xM = x^2y^3 + 2x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^3 - 2x^3y^2 + xy^2 = xy(-2x+y)$$

οπότε $\varphi(xy) = 1 - \frac{2}{xy}$ ή $\varphi(u) = 1 - \frac{2}{u}$

Έτσι $p(u) = e^{\int \varphi(u) du} = e^{\int (1 - 2/u) du} = \dots = \frac{e^u}{u^2}$

Άρα η εξίσωση $\frac{e^{xy}}{x^2y^2}(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2)dx + \frac{e^{xy}}{x^2y^2}(x^2y^2 + 2x^3 - 2x^2)dx$

Είναι άμεσα ολοκληρώσιμη.

$$f(x,y) = \int \frac{e^{xy}}{x^2y^2}(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2)dx + h(y)$$

Άρα $f(x,y) = c \Rightarrow e^{xy}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) = c$

<u>Η Γραμμική Εξίσωση n-τάξεως, $(n \geq 1)$</u>

$a_n(x) y^{(n)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x)$, $a_i, b \in C(I)$ $(i = 0, \dots, n)$

$a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$

τελεστής $L : C^n(I) \to C(I)$

$L(\varphi) = a_n(x) y^{(n)} + \dots + a_0(x) y$, άρα $L(y) = b$ (E)

Λύση της (E) στο $I_1 \subseteq I$ $y \in C^n(I_1)$ για την οποία είναι $L(y)(x) = b(x)$, $x \in I$

Αντίστοιχα, ομογενής : $L(y) = 0 (b_0)$, $b(x) = 0$, $x \in I$

<u>Π.Α.Τ.</u>

$L(y) = b$ (E)

$y(x_0) = c_0$, $y'(x_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$ (C)

Θεώρημα

Ας είναι $x_0 \in I$ και $c_0, \dots, c_{n-1}$ σταθερές, τότε $\exists!$ λύση της (Ε) στο I που πληροί τις $y(x_0) = c_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$

Απόδειξη

Θέτουμε

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y' = y_1'$$
$$y_3 = y'' = y_2'$$
$$\vdots$$
$$y_n = y^{(n-1)} = y_{n-1}'$$

$$y_n' = y^{(n)} \underset{=}{\overset{(E)}{=}} -\frac{a_0}{a_n} y - \frac{a_1}{a_n} y_1' \dots + \frac{b}{a_n}$$

$$= -\frac{a_0}{a_n} y_1 - \dots + \frac{b}{a_n}$$

Για $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ το σύστημα γράφεται

$$\bar{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\frac{a_0}{a_n} & & & & & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b/a_n \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{y}' = \underbrace{A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)}_{f(x,\bar{y})}$$

Εφαρμόζω το Θ.3

Για $f(x,\bar{y}) = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$, $x \in I$

$f(x,\bar{y})$ συνεχής στο $I \times \mathbb{R}^n$, αν J συμπαγές υποδιάστημα του I, $\forall x \in J$, $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^n$

Έχω ότι:

$$\|f(x,\bar{y}_1) - f(x,\bar{y}_2)\| = \|A(x)\bar{y}_1 - A(x)\bar{y}_2\| = \|A(x)(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)\| \leq \|A(x)\| \, \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$$

$$\leq \underbrace{\sup_J \|A(x)\|}_{\in \mathbb{R}} \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$$

αφού $A(x)$ συνεχής, σε συμπαγές

Οπότε η $f(x,\bar{y})$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με $k_J = \sup_J \|A(x)\|$, $\forall J$ συμπαγές του I απ' το Θ3 έπεται ότι το (Ε)-(C) έχει μοναδική λύση στο I.

Θεώρημα

$L(y)=0$
$y(x_0)=0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=0$ $\Big\| \Rightarrow y \equiv 0$

Άσκηση 27

$y' = a x + b$
$y(x) = -\int_x^{\infty} b(s)\, e^{\int_s^x a(t)dt} ds$

B-39

(E) $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i=0,\dots,n-1)$ $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

Ας είναι y_0 λύση της (E_0) που πληροί τις $y_0(0) = y_0'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0$

$y^{(n-1)}(0) = 1$

να αποδείξω ότι: $y_p(x) = \int_0^x y_0(x-t) b(t) dt = 0$ είναι λύση της (E) που πληροί τις

$y_p(0) = \dots = y_p^{(n-1)}(0) = 0$

Λύση

Θδο είναι λύση η y_p (με κανόνα Leibnitz)

$y'_p = \cancel{y_0(x-x) b(x)}^{\to 0} + \int_0^x y_0'(x-t) b(t) dt$

άρα $y_p^{(k)} = \int_0^x y_0^{(k)}(x-t) dt$, $k \le n-1$

$y_p^{(n)} = y_0^{(n-1)}(0)\, b(x) + \int_0^x y_0^{(n)}(x-t) b(t) dt$

$L(y_p) = b(x) + \int_0^x \cancel{L(y_0)}^{\to 0}(x-t) b(t) dt$

$L(y_p) = b \Rightarrow y_p$ λύση της (E)

$y_p^{(i)}(0) = 0$, $i=0,\dots,n-1$